www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1990

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option économique)

Coefficient 4

Lundi 30 avril 1990 de 14 heures à 18 heures

EXERCICE 1

Soient f, g les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont les matrices, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, sont respectivement :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} .$$

1. a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
   b. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g .

2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et de g .

3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $H(\alpha)$ la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$H(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -2 & 3-\alpha & 4-\alpha \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} .$$

   a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $H(\alpha) = \alpha F + (1-\alpha)G$.
   b. Calculer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $(H(\alpha))^n$.

EXERCICE 2

ln désigne la fonction logarithme népérien.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{4}\left(x + \cos x + \ln (1+x) \right)$.

1. a. Calculer la fonction dérivée f' de f, et dresser le tableau de variation de la fonction f .

   En déduire que, pour tout x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$, $f(x)$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

   b. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$ une unique solution que l'on notera a .

   (On pourra étudier la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$) .

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) . \end{cases}$$

   a. Montrer $u_0 \leq a \leq u_1$ et que, pour tout entier naturel n , $u_{2n} \leq a \leq u_{2n+1}$.

   b. Dresser sur le modèle suivant un tableau où figurent des valeurs approchées par défaut des nombres u_{2n} , des valeurs approchées par excès des nombres u_{2n+1} , et des valeurs approchées par excès des nombres $u_{2n+1} - u_{2n}$.

n	u_{2n}	u_{2n+1}	$u_{2n+1} - u_{2n}$
0	0	0,75	0,75
1	...	...	...
2	...	...	...
3	...	...	...
4	...	...	...

   En déduire une valeur approchée du nombre a à 10^{-4} près.

.../...

EXERCICE 3

1. On rappelle que la série géométrique de terme général x^n est convergente pour $x \in]-1\,;\,1[$, et que sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est égale à $\frac{1}{1-x}$. On rappelle également que la fonction S ainsi définie sur $]-1\,;\,1[$ est indéfiniment dérivable et que, pour tout entier naturel k, sa dérivée $k^{ième}$ $S^{(k)}$ est définie sur $]-1\,;\,1[$ par : $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

   Démontrer que, pour tout réel $x \in]-1\,;\,1[$ et tout entier naturel k, $\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k\, x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

2. Soit p un nombre réel tel que $0 < p < \frac{2}{3}$.

   Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est $\frac{1}{2}p^n$, **quand $n \geq 1$** ; par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est $\frac{1}{2}$.

   a. Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant. Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.

   b. Soient n un entier tel que $n \geq 1$, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. On considère une famille de n enfants : calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.

   c. Soit un entier $k \geq 1$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.

   d. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

EXERCICE 4

ln désigne la fonction logarithme népérien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1. a. Quelle est la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln\,(x + \sqrt{1+x^2})$?

   b. Calculer I_0.

2. Calculer I_1.

3 a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$; en déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

   b. Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4. a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$.

   b. Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail